

3 МОДУЛЬ

АБСОЛЮТ ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ ДИНАМИКАСЫ. ИНЕРЦИЯЛЫҚ ЕМЕС САНАҚ ЖҮЙЕЛЕРІНДЕГІ ҚОЗҒАЛЫС. ТАРТЫЛЫС ӨРІСІНДЕГІ ҚОЗҒАЛЫС.

8 Лекция

Инерция тензоры. Инерция моменті. Қатты дененің кинетикалық энергиясы

8.1 Абсолют қатты дене ұғымы. Инерция тензоры. Қатты дененің инерция моменті. Қатты дененің айналмалы қозғалысының қозғалмайтын өске қарасты динамика теңдеуі

8.2 Гюйгенс – Штейнер теоремасы

8.3 Айналыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы.

Санақ денесі болып кез келген дене алына алады. Алайда, евклидтік геометрия ұғымдарын пайымдап бекіту кезінде басты рөлді **абсолют қатты дене** атқарған болатын. **Абсолют қатты** деп кез келген нүктелерінің арасындағы қашықтық өзгеріссіз болатын денені айтады.

Қатты дене ара қашықтығы тұрақты болатын материялық нүктелер жүйесі ретінде қарастырыла алады. Сондықтан, материялық нүктелер жүйесі тұралы пайымдаулар мен теңдеулер қатты денелер үшін де қолданылады. (50) және (52) теңдеулерді, осы жерде тағы да жазып көрсете кетейік:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (105)$$

Бұл теңдеулер жүйесі жалпы алғанда тұйық жүйе болып саналмайды. Алайда, олар қатты дене үшін тұйық теңдеулер жүйесі болып табылады.

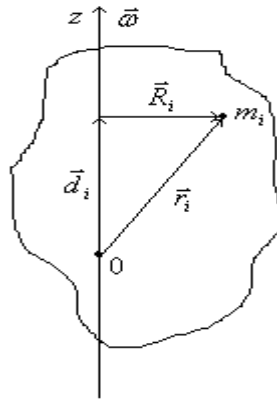
Инерция тензоры. Инерция моменті

Қатты дененің қозғалысын толық сипаттаған кезде оның қозғалыстағы бір нүктесін қараумен қоса, осы нүктені бекітілу нүктесі деп, соның айналасындағы қозғалысты білу қажет болады. Бұл жерде инерция тензоры деп аталатын ұғымның маңызы зор.

Денені О нүктесіне бекітейік. О нүктесіне салыстырғанда m_i нүктенің радиус - векторын $\vec{r}_i$ – деп белгілейік (8 Сурет). Дененің лездік бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}$, ендеше дененің i нүктесінің жылдамдығы $\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Осы берілгендерді қолдана отырып, жалпы алғанда бекітілу нүктесінен өтетін лездік айналу өсіне қатысты қозғалысты келесі өрнекпен сипаттауға болады:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \sum m_i r_i^2 - \sum m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i), \quad (106)$$

мұндағы $\vec{L}$ - бекітілу нүктесіне қарасты бүкіл дененің импульс моменті.



8 Сурет.

(106) векторлық өрнекті координат өстеріне үш проекция түрінде былай жазуға болады:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \end{aligned} \quad (107)$$

бұл жерде $I_{xx} = \sum m_i(\vec{r}_i^2 - x_i^2)$, $I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i$, $I_{xz} = -\sum m_i x_i z_i$ және басқа шамалар да осы жолмен өрнектеледі: I_{yy} , I_{yx} , I_{yz} т.б.

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} шамалары өстік инерция моменттері, ал $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$ және $I_{yz} = I_{zy}$ - центрден тепкіш инерция моменттері деп аталады.

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (108)$$

шамалардың жиынтығы инерция тензоры деп аталады. I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} тензордың диагональ элементтері, ал қалғандары диагональ емес элементтері деп аталынады.

Тензордың диагональ емес элементтері нөлге тең деп есептесек, онда ол мына түрге келеді:

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Бұл жағдайда координат өстерімен дәл келетін дененің өстері инерцияның бас өстері, ал $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, $I_z = I_{zz}$ шамалары бас инерция моменттері деп аталады.

Егер бас өстер дененің массалық центрінен өтетін болса, олар орталық бас өстер деп аталынады.

Көп жағдайда өске қатысты дененің инерция моментінің маңызы жоғары. Ол Z өсіне қатысты былай өрнектеледі (8 сурет)

$$I_{zz} = \sum m_i (\vec{r}_i^2 - z_i^2) = \sum m_i R_i^2, \quad (110)$$

бұл жерде R_i - өстен нүктеге дейінгі ең жақын арақашықтық.

Қозғалмайтын өске қарасты қатты дененің айналмалы қозғалысы динамикасының теңдеуі. Радиусі R_i шеңбер бойымен (8 сурет) массасы m_i материялық нүктенің айналуы кезіндегі оның айналу өсіне проекцияланған импульсының моменті $L_i = m_i v_i R_i$ -ге тең. Сызықтық жылдамдық $v_i = \omega R_i$, сондықтан $L_i = m_i R_i^2 \omega$, мұнда ω – бұрыштық жылдамдық. Егер, z өсін айнала материялық нүктелер жүйесі айналып тұратын болса, онда $L = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega$. Бұдан шығатыны

$$L = I\omega \quad (111)$$

мұнда $I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$, ал ω тұрақты шама ретінде қосындының таңбасының алдына шығарылған.

Материялық нүктелер массаларының олардың айналу өсіне дейінгі қашықтықтарының квадратына көбейтіндісінің қосындысына тең I шамасы осы өске қарасты жүйе **инерциясының моменті** деп аталады. Егер масса үздіксіз таралған болса, онда қосынды таңбасы интеграл таңбасымен алмастырылады, ал инерция моменті мынадай түрде жазылады:

$$I = \int R^2 dm. \quad (112)$$

Дененің инерция моменті – ілгерілемелі қозғалыс кезіндегі массаға теңдес физикалық шама; ол дененің формасына, мөлшеріне, массасына және оның дене ішінде таралуына, сонымен қоса айналу өсін таңдауға тәуелді, ол айналмалы қозғалыс кезіндегі дененің инерттілігін сипаттайды.

Айналмалы қозғалыстың динамикасының негізгі заңын (111)-ді ескере отырып айналу өсіне проекциясында былай жазуға болады:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = M, \quad (113)$$

мұнда M – сыртқы күштердің қосынды моментінің айналу өсіне проекциясы.

Қозғалмайтын өсті айнала қатты дененің айналуының жекелеген жағдайында (113) теңдеу мына түрге өзгереді:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad (114)$$

немесе

$$I \cdot \beta = M, \quad (115)$$

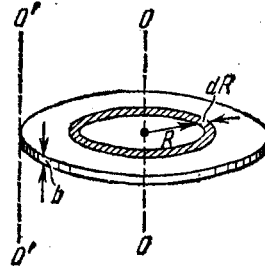
мұнда β – бұрыштық үдеу.

(115)теңдеу қозғалмайтын өске қарасты қатты дененің айналмалы қозғалылыс динамикасының негізгі теңдеуі деп аталады.

Әрбір денеде, дененің қозғалыста не тыныштықта болғанына қарамастан массасы болатындығы сияқты, ол дененің айналуға ма, немесе тыныштықта

тұрғанына қарамастан, кез келген өске қарасты белгілі бір инерция моменті болады.

Мысал ретінде, диск жазықтығына перпендикуляр және оның центрі арқылы өтетін өске қарасты, яғни OO' өсіне қарасты, біртекті дискінің инерция моментін табайық (9 сурет).



9 Сурет.

Бұл үшін (112) формуласын қолданамыз да мынаны табамыз:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV,$$

мұнда ρ – дискінің тығыздығы, ал dV – сақиналық қабаттың көлемі.

$$dV = b 2\pi R dR,$$

мұнда b – дискінің қалыңдығы.

Бұл формулардан, дискінің m массасын енгізе отырып біржолата мынаны аламыз:

$$I = \frac{mR_o^2}{2},$$

мұнда R_o – дискінің радиусі.

Қарастырылған мысалдағы инерция моментін табу дене біртекті және симметриялы болғандықтан, ал біз инерция моментін симметрия өсіне қарасты іздегендіктен тым қарапайымдау болды. Егер де біз дискінің инерция моментін, мысалы, дискіге перпендикуляр және оның шетімен өтетін $O'O'$ өсіне қарасты іздеген болсақ, бәлкім, есептеулер әлдеқайда күрделірек болып шығар ма еді. Мұндай жағдайларда инерция моментін табу, егер де **Гюйгенс – Штейнер теоремасын** пайдаланса, анағұрлым жеңілденер еді: еркін өске қарасты I инерция моменті берілген өске параллель және дене массасының центрінен өтетін өске қарасты I_c инерция моментін дененің m массасы мен өстер аралық a қашықтығы квадратының көбейтіндісіне қосқандағы шамаға тең:

$$I = I_c + ma^2$$

Айналыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы.

Кез келген O нүктеге бекітілген қатты дененің қозғалысын қарастырайық. Осы O нүктемен өстері еркін бағытталған декарттық координаталар жүйесін байланыстырамыз. Сөйтіп денені құраушы i -ші нүктенің кинетикалық энергиясын

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2}{2} = \frac{m_i}{2} \omega^2 r_i^2 \sin^2 \alpha \quad (116)$$

формула көмегімен есептейміз. Ары қарай (116)-ді түрлендіріп, оны былай жазуға болады:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2].$$

Алынған нәтижені барлық элементар массалар бойынша өзара қосып, дененің кинетикалық энергиясын табамыз:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2]. \quad (117)$$

Енді көбейтінділерді координаталық өстерге проекциялар арқылы жазсақ, әрі қарай түрлендірсек, онда түпкілікті нәтижеге келеміз:

$$E_k = \frac{1}{2} \left[I_{xx} \omega_x^2 + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_z + I_{yx} \omega_y \omega_x + I_{yy} \omega_y^2 + \right. \\ \left. + I_{yz} \omega_y \omega_z + I_{zx} \omega_z \omega_x + I_{zy} \omega_z \omega_y + I_{zz} \omega_z^2 \right] \quad (118)$$

Алынған формуланың күрделілігі декарттық координаталар жүйесін еш таңдаусыз қабылдауға байланысты болып отыр. Егер координаталар жүйесінің өстерін дененің инерциясының бас өстерімен бірдей қылып алса, центрден тепкіш инерция моменттері нөлге тең болып, (118) теңдеу едәуір ықшамдалады:

$$E_k = \frac{1}{2} [I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2] \quad (119)$$

Егер дененің бекітілген нүктесін және сонымен қоса координаталардың бастапқы нүктесін дененің массалық центріне ауыстырса, ал координаталар өстерін инерцияның центрлік бас өстерімен біріктірсе, дене инерцияның бас өстерінің біреуін, мысалы z өсін, айнала қозғалады. Онда (119) тіпті қарапайым түрге келеді:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (120)$$